

# Construções geométricas:

as três primeiras proposições dos *Elementos*

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

**Que regras, que instrumentos?**

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

**Que regras, que instrumentos?**

- recta, segmento de recta, semirecta

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

## **Que regras, que instrumentos?**

- recta, segmento de recta, semirecta
  - dois pontos
  - régua não graduada

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

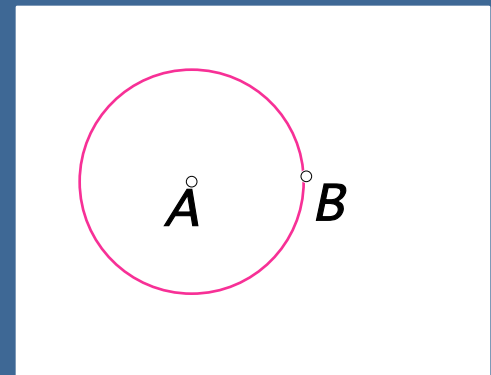
## **Que regras, que instrumentos?**

- recta, segmento de recta, semirecta
  - dois pontos
  - régua não graduada
- circunferência
  - dois ou três pontos?

# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

## Que regras, que instrumentos?

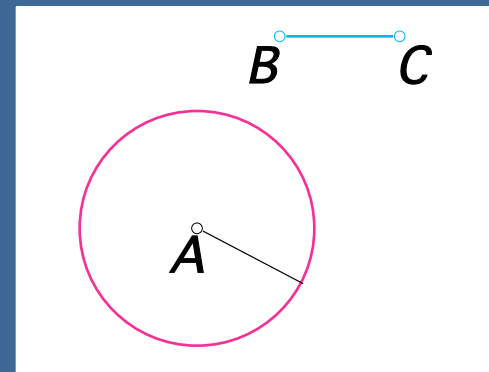
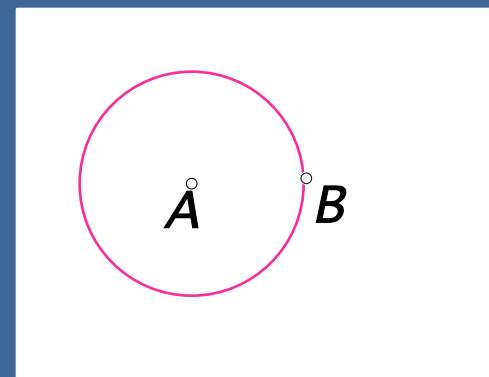
- recta, segmento de recta, semirecta
  - dois pontos
  - régua não graduada
- circunferência
  - dois pontos?



# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

## Que regras, que instrumentos?

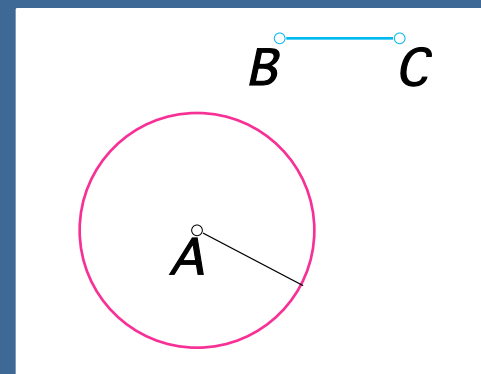
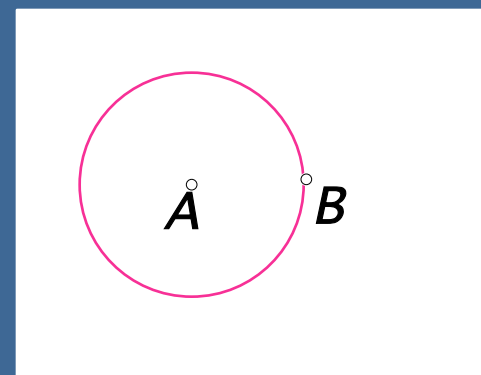
- recta, segmento de recta, semirecta
  - dois pontos
  - régua não graduada
- circunferência
  - dois ou três pontos?



# Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?

## Que regras, que instrumentos?

- recta, segmento de recta, semirecta
  - dois pontos
  - régua não graduada
- circunferência
  - dois ou três pontos?
  - que tipo de compasso?
    - “sem memória” (euclidiano)
    - p/ transportar segmentos (moderno)



# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

## **Instrumentos**

*Geometer's Sketchpad*

- régua não graduada
- compasso euclidiano

# Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?

## Instrumentos

- régua não graduada
- compasso euclidiano

*Geometer's Sketchpad*



compasso euclidiano

régua não graduada

**GSP**

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

## **Instrumentos**

- régua não graduada
- compasso euclidiano

**Regras?** (*3 postulados, de 5 no total*)

# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

## **Instrumentos**

- régua não graduada
- compasso euclidiano

**Regras?** (*3 postulados, de 5 no total*)

(É permitido:)

I. Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$



# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

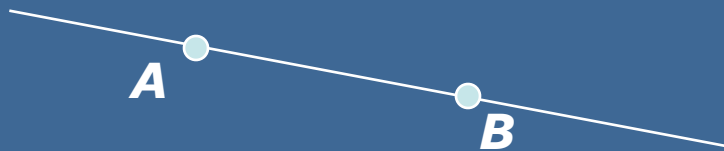
## **Instrumentos**

- régua não graduada
- compasso euclidiano

## **Regras?** (3 postulados, de 5 no total)

(É permitido:)

- I. Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$
- II. Dado o segmento  $AB$ , prolongá-lo numa recta ou semirecta



# *Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?*

## **Instrumentos**

- régua não graduada
- compasso euclidiano

## **Regras?** (*3 postulados, de 5 no total*)

(É permitido:)

- I. Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$
- II. Dado o segmento  $AB$ , prolongá-lo numa recta ou semirecta
- III. Dados os pontos  $A$  e  $B$ , construir a circunferência de centro em  $A$  e passando por  $B$ .

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

## **Construção geométrica euclidiana?**

*Construção geométrica que utiliza exclusivamente a régua não graduada e o compasso euclidiano*

# ***Os Elementos de Euclides, jogo das construções geométricas?***

## **Construção geométrica euclidiana?**

*Construção geométrica que utiliza exclusivamente a régua não graduada e o compasso euclidiano*

***Os Elementos são, em grande parte, propostas de problemas de construções geométricas. Euclides resolve e demonstra a validade das construções apresentadas.***

## *As três primeiras construções*

Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

## *As três primeiras construções*

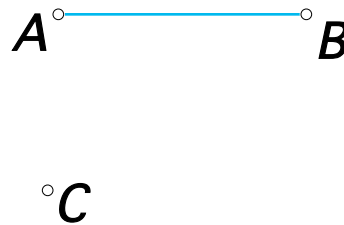
Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

Prop. I.2. Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado.

## *As três primeiras construções*

Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

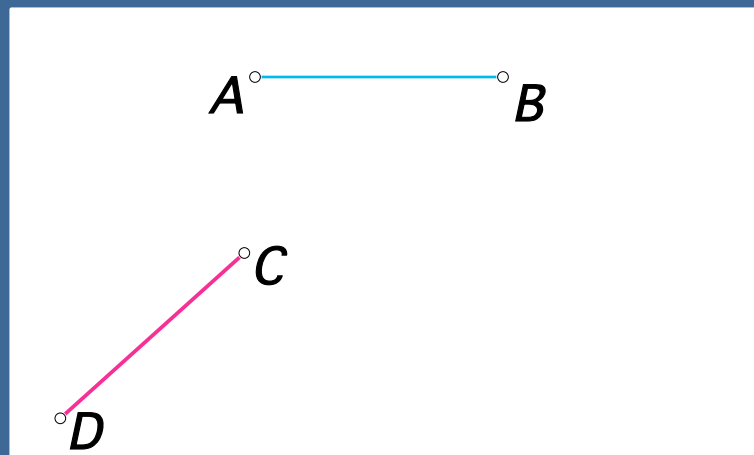
Prop. I.2. Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado.



## *As três primeiras construções*

Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

Prop. I.2. Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado.



## *As três primeiras construções*

Prop. I.1. Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero.

Prop. I.2. Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado.

Prop. I.3. Dados dois segmentos desiguais, cortar do maior um segmento igual ao mais pequeno.

I.1 — Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero

Post. I— Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$

Post. III — Construir uma circunferência com centro  $A$  e passando por um ponto  $B$ .



I.1 — Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero

Post. I— Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$

Post. III — Construir uma circunferência com centro  $A$  e passando por um ponto  $B$ .



I.1 — Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero

I.2 — Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado

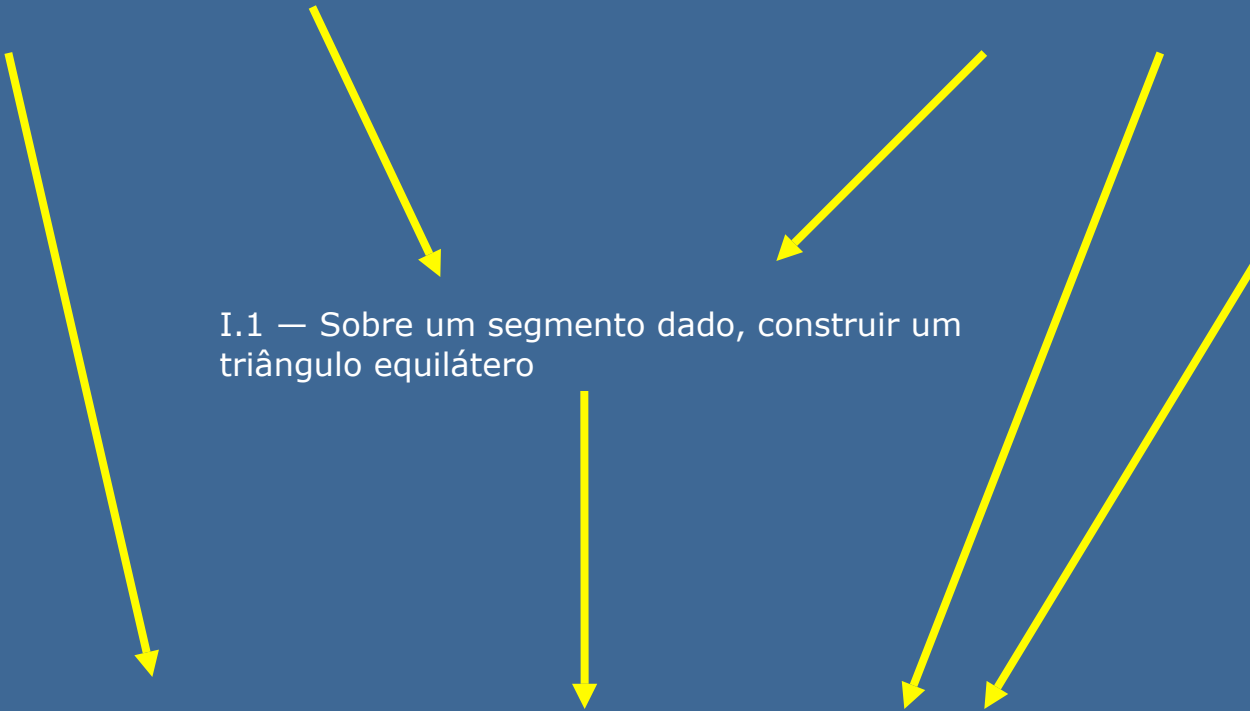
Post. I— Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$

Post. III — Construir uma circunferência com centro  $A$  e passando por um ponto  $B$ .

Post. II — Dado o segmento  $AB$ , prolongá-lo numa recta ou numa semirecta

I.1 — Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero

I.2 — Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado



Post. I— Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir o segmento  $AB$

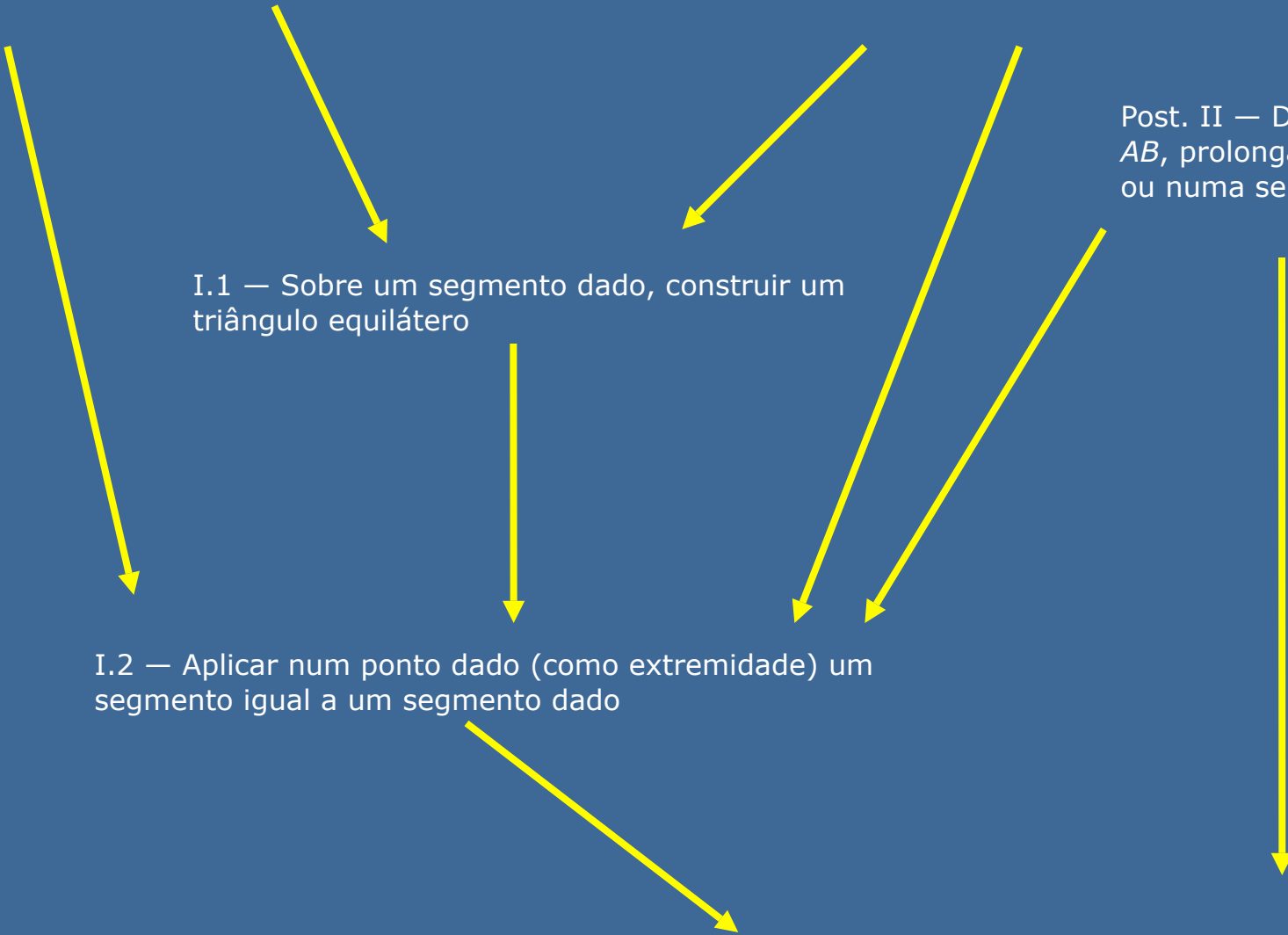
Post. III — Construir uma circunferência com centro  $A$  e passando por um ponto  $B$ .

Post. II — Dado o segmento  $AB$ , prolongá-lo numa recta ou numa semirecta

I.1 — Sobre um segmento dado, construir um triângulo equilátero

I.2 — Aplicar num ponto dado (como extremidade) um segmento igual a um segmento dado

I.3 — Dados dois segmentos desiguais, cortar do maior um segmento igual ao mais pequeno



# Os três problemas clássicos de construções geométricas

*Duplicação do cubo*



*Quadratura do círculo*



*Trissecção do ângulo*



# Os três problemas clássicos de construções geométricas

No século XIX, com o auxílio da álgebra, foi demonstrada a impossibilidade de resolver qualquer os três problemas de construções geométricas, *se forem usados apenas os instrumentos da geometria euclidiana.*

# O século das “impossibilidades”

# O século das "impossibilidades"

- o axioma das paralelas de Euclides "não é demonstrável"
  - consequência da criação das geometrias não euclidianas (Lobachevsky (1792-1856) e Bolyai (1802-1860))

# O século das "impossibilidades"

- o axioma das paralelas de Euclides "não é demonstrável"
  - consequência da criação das geometrias não euclidianas (Lobachevsky (1792-1856) e Bolyai (1802-1860))
- a equação geral do quinto grau não é resolúvel por meio de radicais (Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832))

# O século das "impossibilidades"

- o axioma das paralelas de Euclides "não é demonstrável"
  - consequência da criação das geometrias não euclidianas (Lobachevsky (1792-1856) e Bolyai (1802-1860))
- a equação geral do quinto grau não é resolúvel por meio de radicais (Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832))
- a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo são impossíveis em geometria euclidiana (com régua não graduada e compasso) (Wantzel (1814-1848))

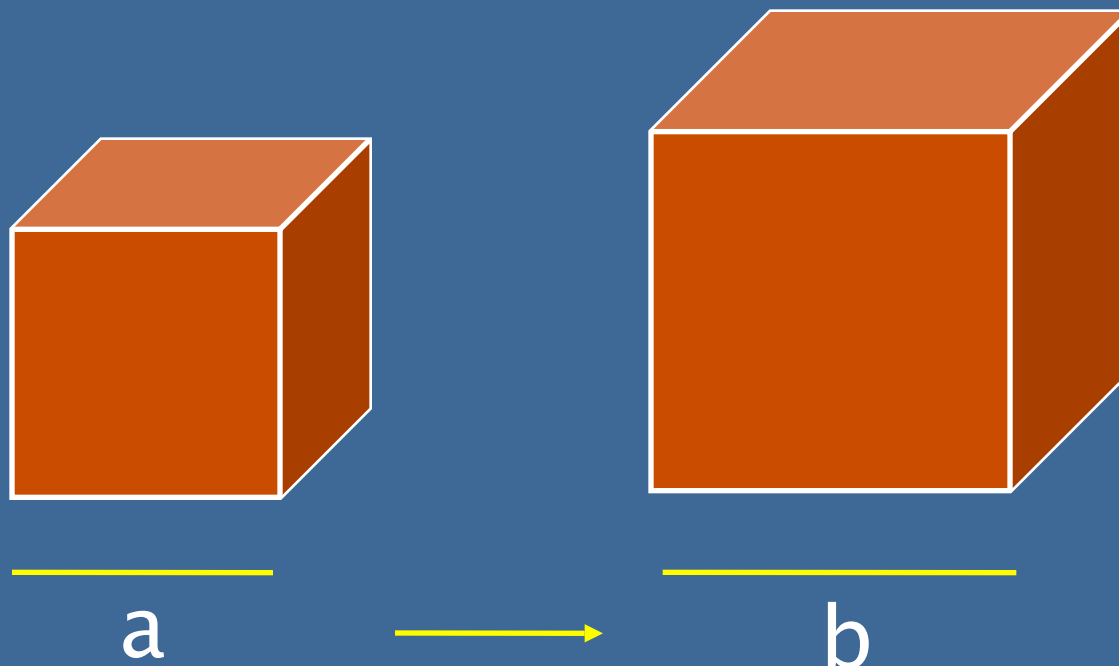
# O século das "impossibilidades"

- o axioma das paralelas de Euclides "não é demonstrável"
  - consequência da criação das geometrias não euclidianas (Lobachevsky (1792-1856) e Bolyai (1802-1860))
- a equação geral do quinto grau não é resolúvel por meio de radicais (Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832))
- a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo são impossíveis em geometria euclidiana (com régua não graduada e compasso) (Wantzel (1814-1848))
- a quadratura do círculo é impossível em geometria euclidiana (com régua não graduada e compasso) (Lindemann (1852-1939))

# Soluções não ortodoxas

- *usando outros instrumentos!* (outro jogo...)
  - exemplo: *trisseccção do ângulo com régua graduada*

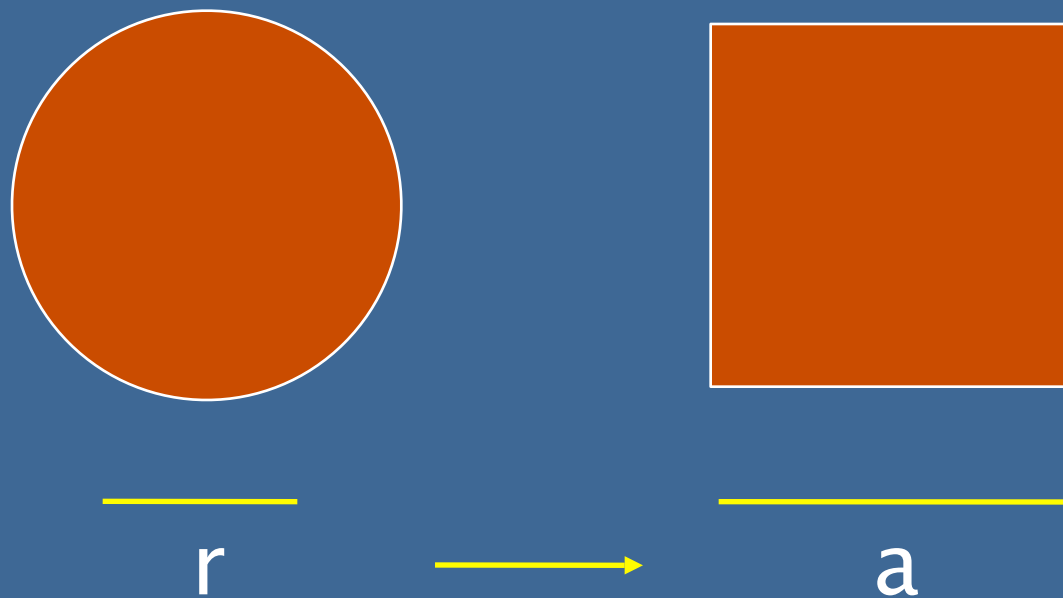
## *Duplicação do cubo*



Dado um cubo de aresta  $a$ , determinar, com régua não graduada e compasso, a aresta  $b$  de outro cubo com o dobro do volume.



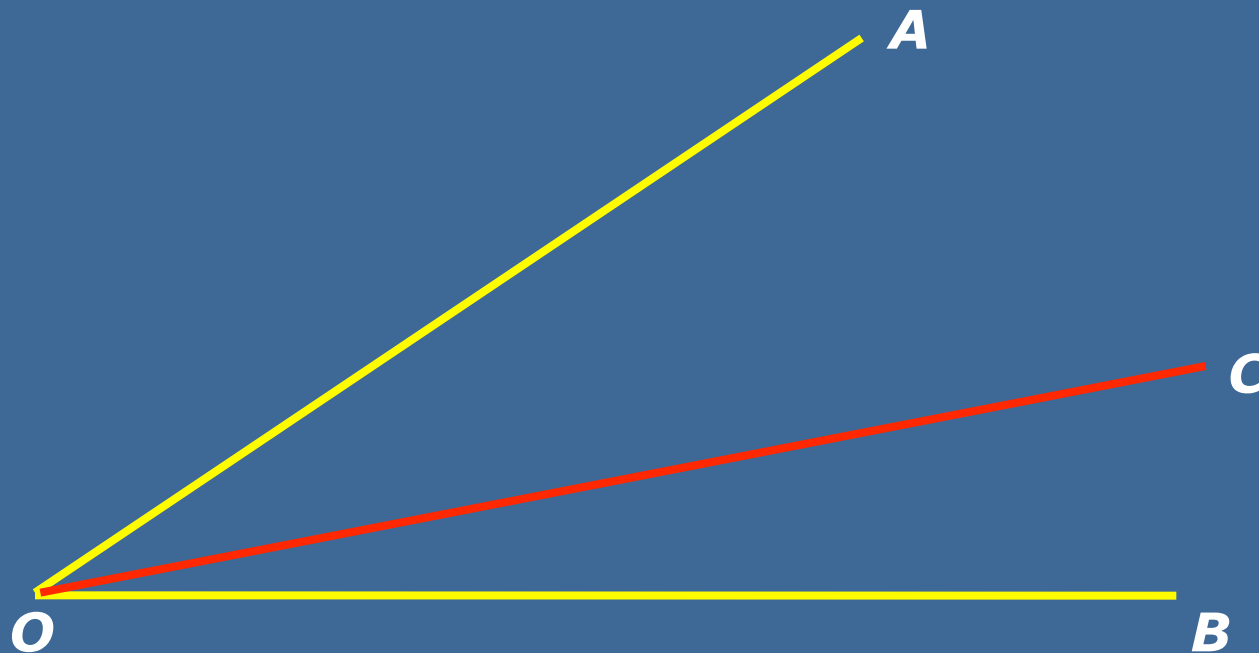
# Quadratura do círculo



Dado uma circunferência de raio  $r$ , determinar, com régua não graduada e compasso, o lado  $a$  de um quadrado com a mesma área.



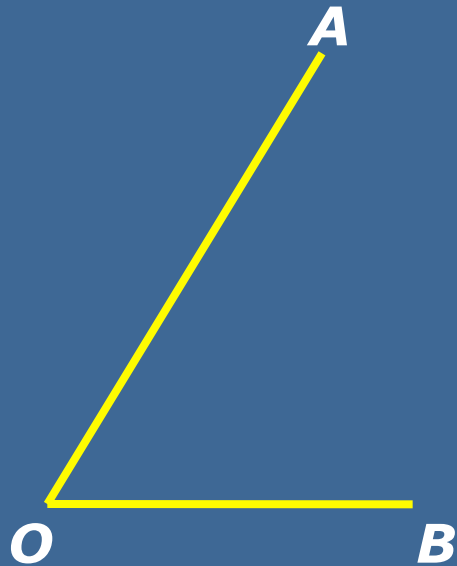
## Trisseccção do ângulo



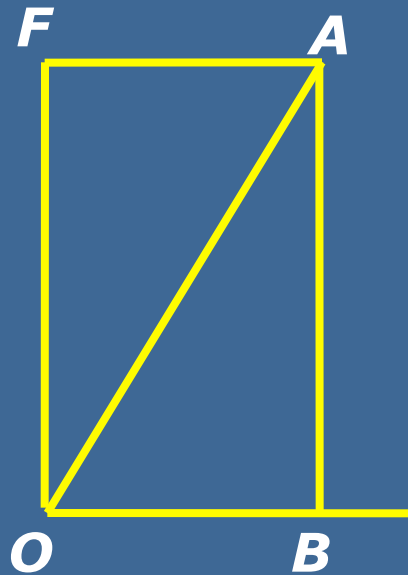
Dado um ângulo  $AOB$ , determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo  $COB$  com amplitude igual a  $1/3$  da amplitude de  $AOB$ .



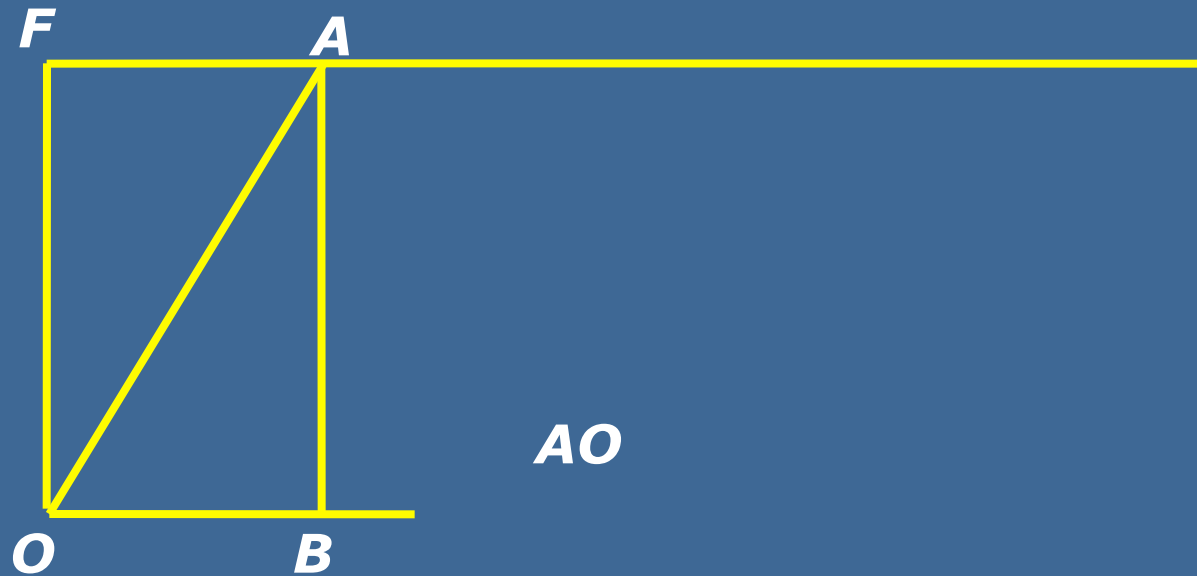
# Por meio de uma *nêusis*



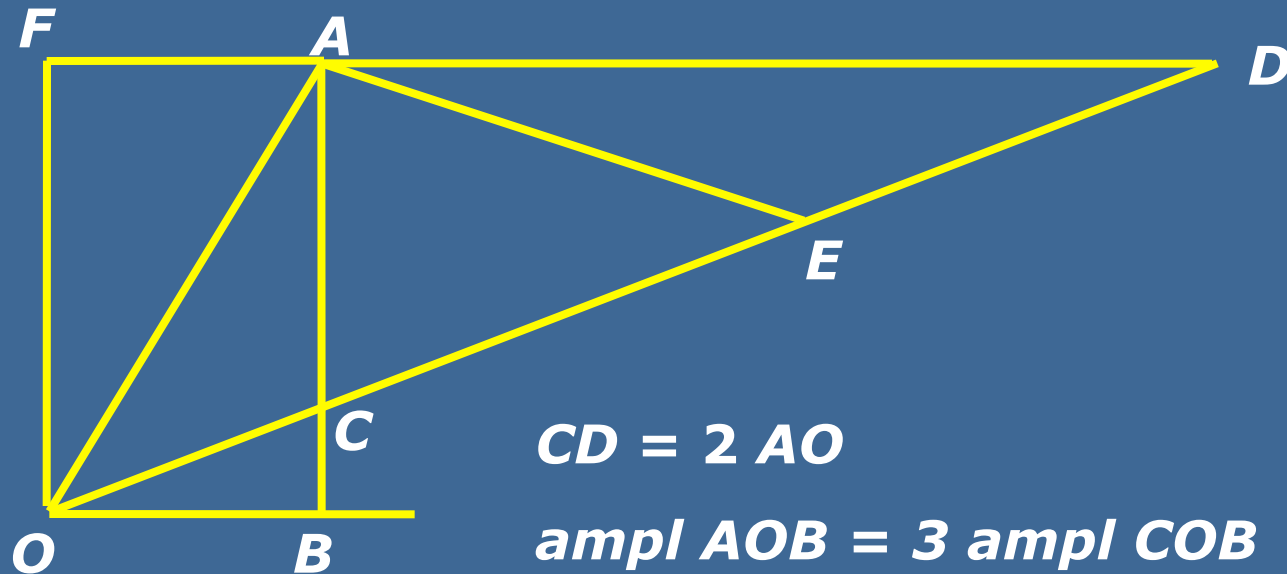
# Por meio de uma *nêusis*



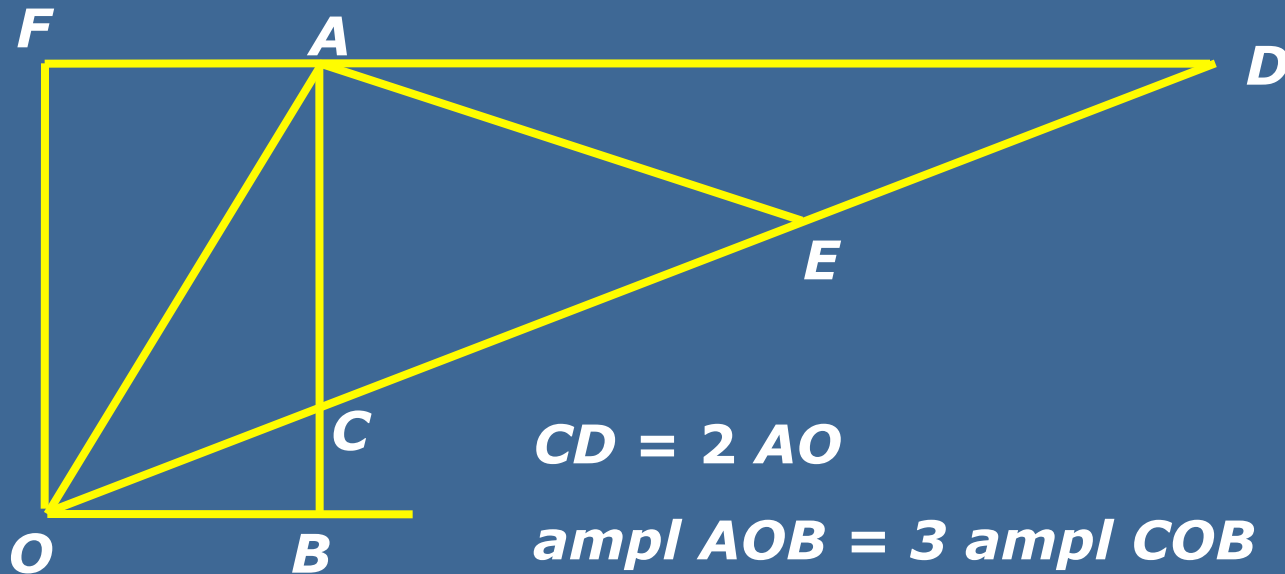
# Por meio de uma *nêusis*



# Por meio de uma *nêusis*



# Por meio de uma *nêusis*



$$CD = 2 AO$$

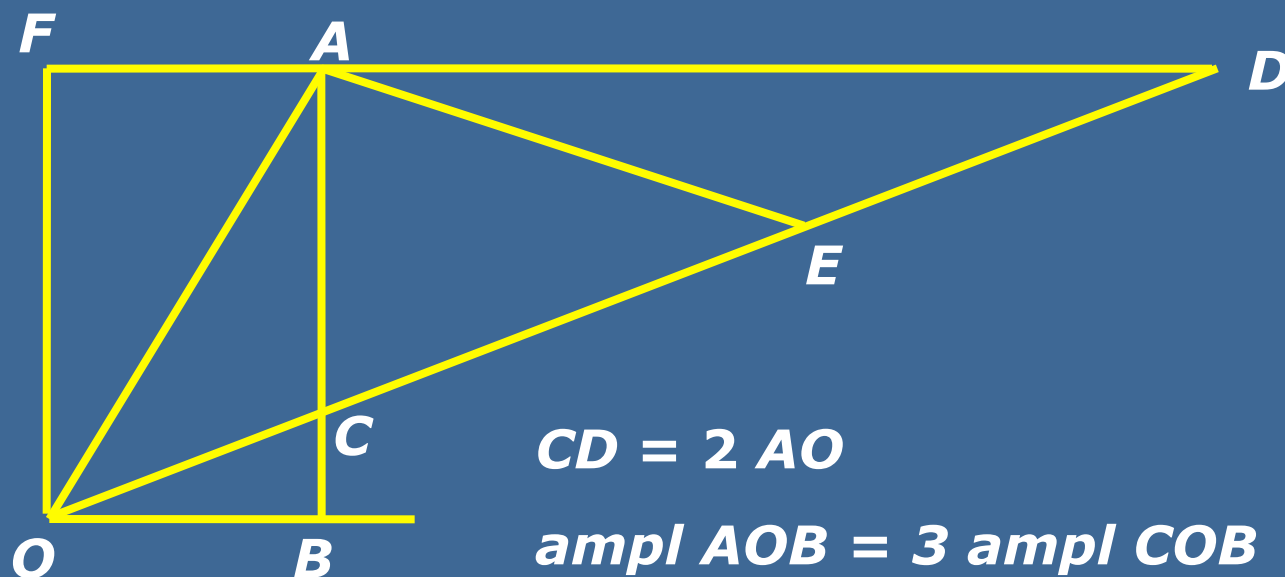
$$\text{ampl } AOB = 3 \text{ ampl } COB$$

$$AO = CE = ED = AE$$

$$\text{ampl } AEO = 2 \text{ ampl } ADE$$

## Por meio de uma *nêusis*

- a trissecção do ângulo reduz-se ao problema de inserir um segmento dado entre duas rectas de tal modo que o prolongamento do segmento passe por um ponto dado



$$CD = 2 AO$$

$$\text{ampl } AOB = 3 \text{ ampl } COB$$

$$AO = CE = ED = AE$$

$$\text{ampl } AEO = 2 \text{ ampl } ADE$$

## Solução com régua graduada (Arquimedes?)

- Uma régua com duas marcas permite facilmente fazer uma *nêusis* para a trissecção