01. Transformações geométricas (significado e notações)

A expressão "transformação geométrica" é utilizada com vários sentidos na literatura matemática. As indicações que se seguem destinam-se a esclarecer o sentido que tem essa expressão neste curso e também a fixar algumas notações.

Transformação geométrica – definição adoptada neste curso

De uma maneira geral, iremos situar-nos no contexto da geometria euclidiana. Nesta geometria — que fez parte de um curso anterior —, ponto, recta e plano são termos primitivos. Isso quer dizer que nos abstemos de dar definições desses conceitos e que a sua utilização deve ser feita de acordo com os axiomas da geometria euclidiana (ver Franco de Oliveira, *Geometria Euclidiana*).

O plano e a recta da geometria euclidiana são conjuntos de pontos. Utilizaremos letras maiúsculas, em itálico, para designar pontos (P, Q, R, ...). As rectas são designadas por letras minúsculas em itálico (r, s, t, ...). Neste curso estudaremos sobretudo a geometria euclidiana no plano, e assim estaremos a considerar sempre o mesmo plano (euclidiano), a que chamaremos simplesmente o "plano euclidiano", sem atribuição de qualquer notação especial.

O corpo dos números reais será designado por $\mathbb{R}$. Como iremos utilizar, além da geometria sintética, representações analíticas das transformações geométricas, dado um plano euclidiano suporemos sempre fixado sobre esse plano um sistema de coordenadas ortogonal e monométrico, identificando assim os pontos do plano aos pares ordenados de números reais, ou seja, o plano passará a ser designado por $\mathbb{R}^2$.

Por esta razão, designaremos sempre o plano euclidiano por $\mathbb{R}^2$, mesmo quando as considerações que estejamos a fazer sejam de carácter sintético, ou seja não impliquem ou exijam o emprego de coordenadas. O mesmo para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Vejamos então qual o significado que daremos à expressão "transformação geométrica".

Uma transformação geométrica no plano (ou em $\mathbb{R}^2$) é uma função (ou aplicação) biunívoca de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Utilizaremos letras maiúsculas a bold ($\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, ...) para designar transformações geométricas. Assim, se $\boldsymbol{T}$ for uma transformação geométrica em $\mathbb{R}^2$, para qualquer ponto P de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{T}(P)$ é um ponto de $\mathbb{R}^2$ nas seguintes condições:

- Se $P \neq Q$, então $\boldsymbol{T}(P) \neq \boldsymbol{T}(Q)$; isto é, $\boldsymbol{T}$ é biunívoca (também se costuma dizer *injectiva*).
- Para todo o ponto Q de $\mathbb{R}^2$, existe um ponto P de $\mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{T}(P) = Q$; isto é, $\boldsymbol{T}$ é uma aplicação "sobre" (também se costuma dizer *sobrejectiva*).

Transformação inversa

Do segundo ponto que acabámos de enunciar resulta que para toda a transformação geométrica $\boldsymbol{T}$ existe uma transformação geométrica *inversa* de $\boldsymbol{T}$, que designaremos como é hábito por $\boldsymbol{T}^{-1}$.

Composição (ou produto) de transformações geométricas

Tendo em atenção que as transformações geométricas em $\mathbb{R}^2$ são funções e que o seu contradomínio é sempre todo o conjunto $\mathbb{R}^2$, dadas duas transformações $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$, tem sempre sentido considerar a sua *composição* (chamada muitas vezes *produto*) $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}$, de novo uma transformação geométrica em $\mathbb{R}^2$.

Se P for um ponto de $\mathbb{R}^2$, o transformado Q de P por meio de $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}$ obtem-se aplicando primeiro $\boldsymbol{S}$ e depois $\boldsymbol{T}$, ou seja, $Q = (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S})(P) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}(P))$. Como é conhecido, a inversa da composta é a *composta das inversas por ordem inversa*, ou seja, $(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1} \circ \boldsymbol{T}^{-1}$. Em esquema:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\boldsymbol{S}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}"'] & \boldsymbol{S}(P) \arrow[d, "\boldsymbol{T}"] \\
 & Q = (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S})(P) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}(P))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{S}^{-1} \circ \boldsymbol{T}^{-1})(Q) = \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{T}^{-1})(Q) = P & \boldsymbol{T}^{-1}(Q) \arrow[l, "\boldsymbol{S}^{-1}"'] \\
 & Q \arrow[u, "\boldsymbol{T}^{-1}"'] \arrow[ul, "(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1} \circ \boldsymbol{T}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figuras e transformadas de figuras.

Uma figura plana ***F*** não é mais do que um conjunto de pontos (finito ou infinito) em $\mathbb{R}^2$. Analogamente no caso das figuras tridimensionais. Se ***T*** é uma transformação geométrica e ***F*** uma figura, a transformada de ***F*** por meio de ***T***, ***T***(***F***), não é mais do que a figura constituída pelo conjunto dos transformados dos pontos de ***F***. Pode acontecer que a transformada de ***F*** seja a mesma figura (ou seja, o mesmo conjunto de pontos), ***T***(***F***) = ***F***. Nesse caso diz-se que a figura ***F*** é invariante para a transformação ***T***. Note-se que isso não significa necessariamente que todos os pontos de ***F*** são invariantes, mas apenas que depois de transformados *formam a mesma figura*. Para salientar este facto utiliza-se por vezes a expressão "a figura ***F*** é invariante globalmente para a transformação ***T***".

Pontos fixos de uma transformação. Transformação identidade

Se *P* é um ponto, ***T*** uma transformação geométrica e ***T***(*P*) = *P*, diz-se que *P* é um ponto fixo da (ou para a) transformação ***T***.

Se em $\mathbb{R}^2$ considerarmos a transformação que a cada ponto *P* faz corresponder o próprio ponto *P*, estamos perante uma transformação geométrica a que é hábito chamar a transformação idêntica ou a identidade ***I*** em $\mathbb{R}^2$. Analogamente para $\mathbb{R}^3$.

Todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) são fixos para a transformação identidade.