02. Transformações geométricas em R^2: alguns exemplos

Neste texto serão apresentados alguns exemplos de transformações geométricas em $\boldsymbol{R^2}$. Este texto destina-se a ser trabalhado da seguinte maneira:

• em relação a cada exemplo, deverá tentar modelá-lo no *Sketchpad* e experimentá-lo em seguida, nomeadamente modificando as posições iniciais dos elementos que definem a transformação e procurando descobrir propriedades da transformação em estudo.

Rotação

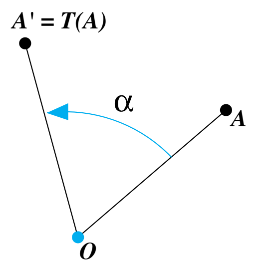
Dados três pontos P, O e Q, o *ângulo orientado* $P\hat{O}Q$ é o ângulo definido pelas semirectas OP e OQ, a que se atribui além disso um sentido, escolhendo OP para lado-origem do ângulo e OQ para lado-extremidade. Supõe-se definido um sentido positivo (o sentido anti-horário, como é habitual) na face do plano em que está definido o ângulo. Isso permite definir igualdade (ou congruência) de ângulos orientados. Se α é um ângulo orientado, $-\alpha$ será por definição o ângulo orientado obtido a partir de α pela troca dos lados origem e extremidade.(Para facilitar a leitura, na frase anterior e noutras deste texto usamos por abuso de linguagem a mesma designação α para um ângulo e para a sua amplitude)

Dados em $\boldsymbol{R^2}$ um ponto O e um ângulo orientado α, chama-se *rotação* de centro O e ângulo α a transformação geométrica $\boldsymbol{T}$ que verifica as seguintes condições (sendo $A' = \boldsymbol{T}(A)$, e A um ponto qualquer de $\boldsymbol{R^2}$):

1) Se $A = O$, $\boldsymbol{T}(A) = A$.A

2) Se $A \neq O$,

- $\measuredangle AOA' = \alpha$;
- os segmentos OA e OA'são iguais.



A rotação *inversa* de $\boldsymbol{T}$ é a rotação de centro O e ângulo $-\alpha$.

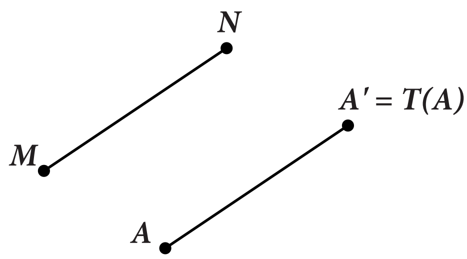
Uma rotação em que $\alpha = 0$ (isto é, em que os lados-origem e extremidade coincidem) reduz-se á transformação identidade $\boldsymbol{I}$.

Por vezes emprega-se a expressão "rotação de amplitude ... graus ou ... radianos" com significado óbvio. Duas rotações $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S}$ com o mesmo centro e cujas amplitudes difiram de um múltiplo de 360° são idênticas como transformações, isto é, para qualquer ponto A de $\boldsymbol{R^2}$, $\boldsymbol{T}(A) = \boldsymbol{S}(A)$.

São importantes, no estudo da simetria, as rotações de amplitude 180°. Por isso têm um nome especial: *meia-volta*.

Translação

Dados dois pontos A e B quaisquer de $\boldsymbol{R^2}$, o *segmento orientado AB* é um segmento de recta AB a que foi atribuído um sentido (de A para B). Os pontos A e B são a *origem* e a *extremidade* do segmento orientado AB. Um segmento orientado possui assim *comprimento*, *direcção* (a direcção da recta AB) e *sentido*. Dois segmentos orientados são *equipolentes* quando têm o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido. Recorde que, dado um segmento orientado MN, pode-se definir um vector (designado por $\boldsymbol{v}_{MN}$) considerando todos os segmentos orientados equipolentes a MN, e que a partir daqui podemos considerar o comprimento (módulo), direcção e sentido do vector.



Dado um vector $\boldsymbol{v}_{MN}$, chama-se *translação* definida pelo vector $\boldsymbol{v}_{MN}$ a transformação geométrica $\boldsymbol{T}$ que faz corresponder, a um ponto qualquer A de $\boldsymbol{R^2}$, o ponto $A' = \boldsymbol{T}(A)$ que é a extremidade do segmento orientado AA' (equipolente a MN e tendo A como origem. Esta translação também se pode dizer, como é natural, definida pelo segmento orientado MN.

Se M coincide com N, a translação reduz-se à identidade (todos os pontos são invariantes). A translação inversa de $\boldsymbol{T}$ é a translação $\boldsymbol{T}$-1 definida pelo segmento orientado NM.

Reflexão

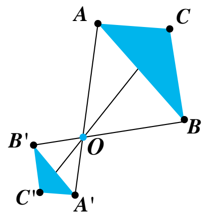
Dada uma recta e do plano $\boldsymbol{R}^2$, chama-se *reflexão* de eixo e a transformação geométrica $\boldsymbol{T}$ que faz corresponder a um ponto A qualquer de $\boldsymbol{R}^2$ o ponto $A'= \boldsymbol{T}(A)$ que verifica a seguinte condição: a mediatriz do segmento AA' é a recta e.

A reflexão tem sido tradicionalmente chamada, em português, *simetria axial.* E por isso o ponto $A' = \boldsymbol{T}(A)$ costuma chamar-se *simétrico* de A em relação ao eixo e. Tendo em atenção que a palavra *simetria* está reservada, em matemática e em muitas outras línguas, para um conceito diferente — que é, de resto, o tema principal deste curso—, devemos fazer esforços para perder o hábito de chamar simetria axial á transformação reflexão. O ponto $A' = \boldsymbol{T}(A)$ deve chamar-se o *ponto reflectido* de A por meio do eixo e (os ingleses dizem *mirror e*).

Se $\boldsymbol{T}$ é uma reflexão, $\boldsymbol{T}^{-1}$ *é a mesma reflexão* (perceba bem porque é assim!). Tem-se, naturalmente, $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$. A composição $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{T}$ pode escrever-se $\boldsymbol{T}^2$. Se uma transformação $\boldsymbol{T}$ verifica a condição $\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{I}$, dizemos que se trata de uma involução. A reflexão é uma involução, portanto.

Dilação ou homotetia

Convenção: Se AB e CD são dois segmentos orientados sobre a mesma recta, convencionamos que a razão AB/CD — que significará sempre a razão dos seus comprimentos, ou seja, um número real) é positiva ou negativa conforme as orientações dos segmentos AB e CD são iguais ou opostas.



Uma *dilação* (*homotetia*) de centro O e razão k (número real) é a transformação geométrica $\boldsymbol{T}$ que faz corresponder, a cada ponto A de $\boldsymbol{R}^2$, um ponto $A' = \boldsymbol{T}(A)$ situado na recta OA e tal que $OA'/OA = k$.

A transformação inversa da dilação $\boldsymbol{T}$ é a dilação com o mesmo centro O e razão $1/k$.

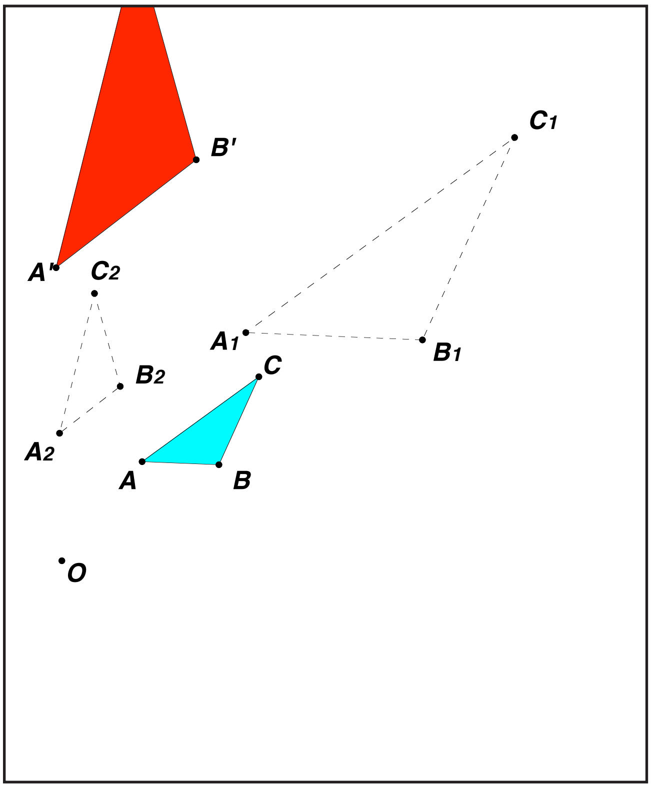
Semelhança em espiral

Um outro tipo de transformações são as semelhanças (transformações que preservam a razão das distâncias). Neste texto vamos apenas apresentar como exemplo de transformação geométrica a *semelhança em espiral* de que vamos dar uma definição directa.

Sejam dados um ponto O, um ângulo (orientado) α e um número real k. Seja $\boldsymbol{D}$ a dilação de centro O e razão k e seja $\boldsymbol{R}$ a rotação de centro O e ângulo α.

A *semelhança em espiral* $\boldsymbol{S}$, de centro O, razão k e ângulo α é a composição de $\boldsymbol{R}$ com $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{S} = R \circ \boldsymbol{D}$. Isto é, sendo A um ponto qualquer de $\boldsymbol{R}^2$, a semelhança em espiral faz-lhe corresponder o ponto A' aplicando, em primeiro lugar, a dilação $\boldsymbol{D}$ a A, e em seguida a rotação $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{D}(A)$. Isto é, $A' = \boldsymbol{S}(A) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}(A))$. Pode demonstrar-se que neste caso particular a composição é comutativa, pelo que podíamos aplicar primeiro $\boldsymbol{R}$ e depois $\boldsymbol{D}$.

Na figura está exemplificado o efeito de uma semelhança em espiral sobre um triângulo ABC. A dilação de razão k transforma o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$, e depois a rotação de 40° transforma este triângulo no triângulo $A'B'C'$. Da figura intui-se que poderíamos ter primeiro efectuado a rotação e depois a dilação, sendo agora o triângulo "intermédio" $A_2B_2C_2$.

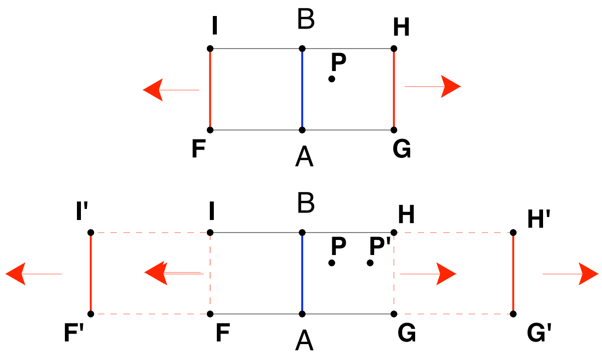


Alongamento (*stretch*)

Tal como o exemplo anterior, o alongamento é um caso particular de um outro tipo de transformações geométricas em $\boldsymbol{R}^2$, as afinidades. Chamamos *alongamento* a esta transformação geométrica designada pelos autores de língua inglesa por *stretch* ou *strain*. Fisicamente, podemos imaginar que o plano $\boldsymbol{R}^2$ se reduz a um rectângulo de borracha $FGHI$.

AB é um segmento (a azul) *fixo*, e os lados FI e GH estão a ser puxados para fora, segundo as setas a vermelho.

As duas metades do rectâgulo são então estendidas uniformemente, cada uma para seu lado do segmento azul (ver parte de baixo da figura). Os pontos do rectângulo, como o ponto *P*, afastam-se do segmento azul, tanto mais quanto mais longe estão dele. Assim, a *P* vai corresponder um ponto *P′*, situado na perpendicular ao segmento azul tirada por *P*. A posição de *P′* pode ser determinada medindo a distância de *P* ao segmento *AB* e multiplicando-a por um factor positivo constante *k* (o factor ou coeficiente de alongamento...) e marcando essa distância a partir do segmento azul sobre a tal perpendicular (não representada na figura). Essa constante *k* é a mesma para todos os pontos. O segmento *AB* fica invariante (porquê?).



Se em vez do rectângulo imaginarmos o plano $\boldsymbol{R}^2$, e em vez do segmento *AB* uma recta *AB* sobre o plano, vemos como, dado um factor *k*, podemos encontrar as imagens de todos os pontos de $\boldsymbol{R}^2$. Note-se, no entanto, que quando definimos matematicamente o alongamento admitimos que o factor *k* pode ser positivo ou negativo. No caso negativo, o ponto *P* é transformado num ponto do lado oposto do segmento *AB*, o que deixa de corresponder à imagem física do "alongamento".

Vejamos então como pode ser definida formalmente a transformação geométrica *alongamento*, exemplo de uma afinidade.

São dados uma recta *AB* em $\boldsymbol{R}^2$ e um número real *k*. O alongamento $\boldsymbol{T}$, definido por *AB* e por *k*, é a transformação que envia (isto é, faz corresponder) qualquer ponto *P* de $\boldsymbol{R}^2$ no ponto *P′* determinado da seguinte forma:

• traça-se por *P* a perpendicular *p* a *AB* e obtém-se a sua intersecção O_P com *AB*;

• determina-se sobre *p* o ponto *P′* tal que $O_pP'/O_pP = k$.

Os pontos da recta *AB* são fixos para esta transformação.

Inversão

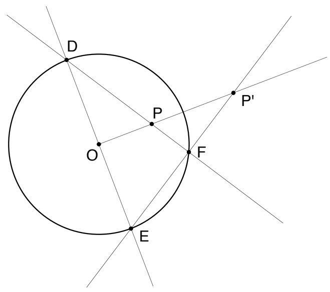
A inversão é uma transformação geométrica que tem particularidades que a distinguem muito das anteriores.

Seja dada uma circunferência *c* com centro num ponto *O* e raio *r*. Seja *P* um ponto qualquer de $\boldsymbol{R}^2$, com excepção do ponto *O*. A *inversão* $\boldsymbol{T}$, associada à circunferência *c*, transforma *P* no ponto *P′*, nas seguintes condições:

• *P′* é um ponto da semirecta *OP*;

• comp(*OP*).comp(*OP′*) = r^2.

Existem diversas construções geométricas do inverso *P′* de *P*. A figura da direita mostra uma dessas construções. Por *O* tira-se uma perpendicular à semirecta *OP* e determina-se assim o diâmetro *DE*. A recta *DP* intersecta a circunferência no ponto *F*. E a recta *EF* intersecta a semirecta *OP* no desejado ponto $P' = \boldsymbol{T}(P)$ (porquê?).



Se tem estado a ler com atenção este exemplo da inversão, certamente notou que a inversão não é uma transformação geométrica tal como foi definida no texto de apoio 01. Na realidade, a inversão não está definida no ponto *O*, e uma transformação geométrica em $\boldsymbol{R}^2$, tal como foi definida, deve ter valores para todos os pontos de $\boldsymbol{R}^2$! Logo, o espaço em que podemos definir esta transformação não pode ser $\boldsymbol{R}^2$. A solução adoptada é ampliar o plano $\boldsymbol{R}^2$, com um ponto Ω(um ponto a "distância infinita", impróprio), que será por definição a imagem do ponto *O* pela inversão. Por outro lado, a imagem de Ω por meio da inversão será o ponto *O*.

Esse conjunto, obtido pela união de $\boldsymbol{R}^2$com o ponto Ω, é uma das formas de ampliar o espaço $\boldsymbol{R}^2$. Assim, a inversão será uma transformação geométrica no conjunto $\boldsymbol{R}^2 \cup \{\Omega\}$. Aí, é biunívoca e sobrejectiva.