03. Isometrias no plano (I)

Definição e primeiros resultados

Na investigação 01 sobre as propriedades de alguns exemplos de transformações geométricas em $\mathbf{R}^2$, concluímos que três delas (e apenas essas três) – a rotação, a translação e a reflexão –, *preservavam as distâncias*. Esta propriedade tem consequências muito importantes, como veremos. Uma transformação geométrica que verifique esta propriedade chama-se ***isometria*** – do grego *isos* (igual) e *metron* (medida).

Neste texto, estudaremos apenas isometrias no plano, pelo que nos dispensaremos de repetir constantemente que os objectos geométricos considerados são pontos ou conjuntos de pontos de $\mathbb{R}^2$.

Assim:

Diz-se que a transformação geométrica *T* é uma *isometria* se, para quaisquer dois pontos *A*,*B*, dist(*A'*,*B'*) = dist (*A*,*B*), em que *A'* = *T*(*A*) e *B'* = *T*(*B*).

A condição "preservar as distâncias" é muito forte, no sentido em que o conhecimento dos transformados de uma isometria num pequeno número de pontos, de facto *em três pontos não colineares*, define completamente a transformação. Sejam *A*, *B* e *C* três pontos não colineares, e ***T*** uma isometria. Sejam ainda dados três pontos *A'*, *B'* e *C'* que por hipótese são os transformados por ***T*** de *A*, *B* e *C*, respectivamente. Naturalmente, os pontos *A'*, *B'* e *C' não podem ser dados arbitrariamente,* pois ***T*** é uma isometria. De uma maneira simples, podemos dizer que devemos ter o cuidado de *dar* pontos *A'*, *B'* e *C'* tais que os segmentos *A'B'*, *B'C'* e *C'A'* sejam respectivamente iguais aos segmentos *AB*, *BC* e *CA*. Por outras palavras, o triângulo formado pelos pontos *A'*, *B'* e *C'* terá que ser congruente (geometricamente igual) ao triângulo *ABC* (ver figura 1). Na construção, de que indicamos em seguida os passos (e que deve acompanhar no *Sketchpad*), supõe-se dado o triângulo *ABC* e constrói-se, na máxima generalidade, um triângulo *A'B'C'*:

- escolhe-se arbitrariamente um ponto *A'*;
- traçam-se as circunferências c_1 e c_2, de centro em *A'* e (respectivamente) raios *AC* e *AB*;
- escolhe-se arbitrariamente um ponto *B'* em c_2, obrigando-se assim o segmento *A'B'* a ser igual ao segmento *AB* (podia igualmente ter-se começado pelo ponto *C'* em c_1);
- traça-se a circunferência c_3, com centro em *B'* e raio *BC* (temos a certeza que intersecta c_1, porquê?);
- existem dois pontos de intersecção, sejam C_1 e C_2; e portanto duas hipóteses para *C'*;
- o triângulo $A'B'C_1$, preto-vermelho, tem a mesma orientação que *ABC*, o triângulo $A'B'C_2$, preto-verde, tem orientação oposta: ambos respondem ao requisito de serem iguais a *ABC*.

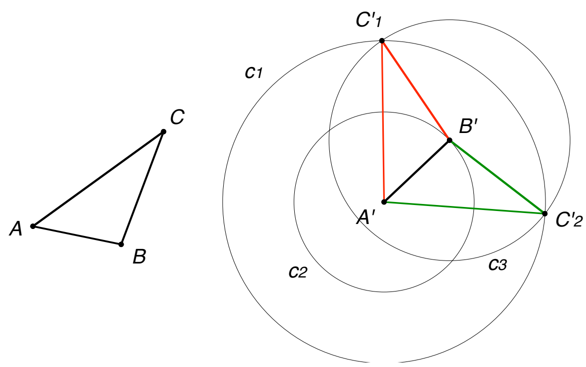

fig. 1

Como poderá constatar praticamente no *Sketchpad* e perceber logicamente, reflectindo sobre a construção, o ponto *A'* pode ser escolhido em todo o plano, depois o ponto *B'* em toda a circunferência c_2, e finalmente o ponto *C'* tem duas posições possíveis. Resta-nos agora ver como, nestas condições, escolhido um determinado triângulo *A´B´C´* como transformado por ***T*** do triângulo *ABC*, fica definido o transformado ***T***(*P*) de um ponto qualquer *P*.

Sejam então os triângulo *ABC* e *A´B´C´* como na figura 2 (escolhemos o caso da *mesma orientação*, mas o raciocínio seria exactamente o mesmo no outro caso). A construção agora é a seguinte:

- com centro em *A'* e raio *AP* traçamos a circunferência c_a, onde terá que estar o ponto *P'* (porquê?);
- com centro em *B'*, e raio *BP*, traçamos a circunferência c_b, que intersecta necessariamente c_a em dois pontos *X* e *Y* (porquê?), um dos quais deverá ser o ponto *P'* (porquê?);

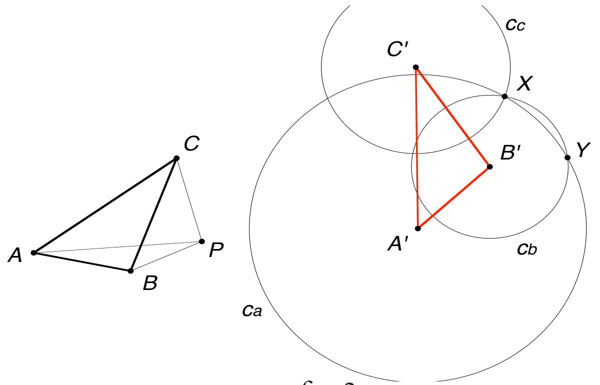

fig. 2

• com centro em *C'* e raio *CP*, traçamos a circunferência c_c, que passa obrigatoriamente ou por X ou por Y (porquê?). Esse ponto (X ou Y) será então o ponto *P'*.

Fica assim demonstrado que, como dissémos, o conhecimento dos transformados de três pontos não colineares determina completamente uma isometria.

Por outras palavras, temos um primeiro resultado sobre isometrias:

Isom.01 – Se *T* e *S* são duas isometrias, e se para três pontos *A*, *B* e *C* não colineares se tem *T*(*A*) = *S*(*A*), *T*(*B*) = *S*(*B*) e *T*(*C*) = *S*(*C*), então *T* = *S*.

(Questões para reflexão: que significa ***T*** = ***S*** ?; a hipótese dos três pontos *não serem colineares* é realmente necessária?)

Algumas propriedades das isometrias[1]

Seja ***T*** é uma isometria, e designemos em geral por *X'* o transformado do ponto *X* por meio de ***T***. Demonstre (não necessariamente tudo de uma vez!) os seguintes resultados gerais referentes a isometrias:

Isom.02 – Se *A*–*B*–*C* então *A'*–*B'*–*C'*, isto é, as isometrias perservam a relação "situado entre".

Nota: *A*–*B*–*C* quer dizer que *A, B* e *C* são colineares e que *B* está situado entre *A* e *C*.

Isom.03 – As isometrias preservam a noção de ponto médio.

Isom.04 – As isometrias perservam a noção de segmento de recta.

Isom.05 – As isometrias preservam a noção de semirecta.

Isom.06 – As isometrias transformam rectas em rectas.

Isom.07 – As isometrias preservam a noção de paralelismo.

Isom.08 – As isometrias perservam a noção de triângulo.

Nota. Três pontos *A*, *B*, *C* formam um triângulo se não são colineares, ou seja se se verifica a desigualdade triangular estrita (sem igualdade) (que quer isto dizer?).

Isom.09 – As isometrias preservam os ângulos (não orientados) e os valores absolutos das suas amplitudes.

Isom.10 – As isometrias preservam a noção de perpendicularidade.

Notas

1. Lista inspirada no livro *Transformation Geometry*, de George Martin, págs. 27 e 28.